CLEAI, matematica generale: prova scritta 19 maggio 2004

1. Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} x^2\sqrt{x} - 2/x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ (x^2 + 2x)/x & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

   Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti di discontinuità; (c) limiti; (d) asintoti; (e) monotonia; (f) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (g) punti di non derivabilità.

2. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 0; (l) punti di non derivabilità.

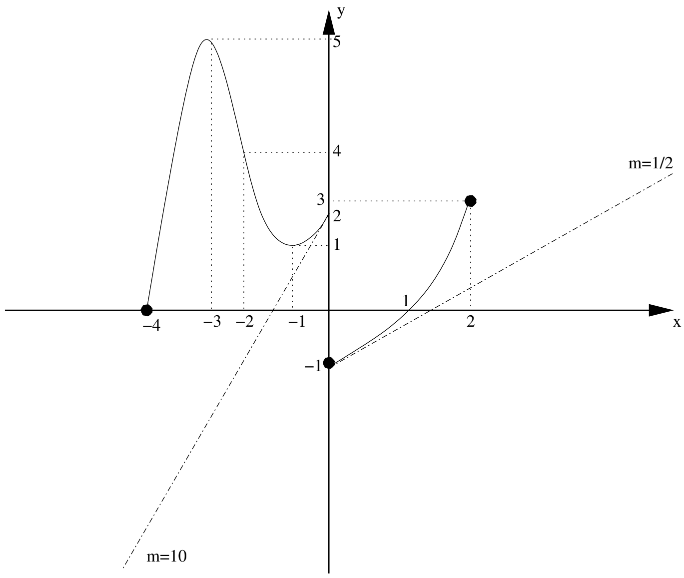

Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

3. Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(-1, 3]$ della seguente funzione:

$$f(x) := x^3 - 1$$

4. Stabilire se $f(x) := x^5 - 4x + 1$ ha punti fissi sul suo campo d'esistenza. In caso affermativo, dire quanti sono tali punti fissi e stimarli tutti con precisione di almeno un'unità.

5. Stabilire se la curva $f(x) := x^3 + x - 1$ ha zeri nell'intervallo $(-1, 1)$. In caso affermativo, dire quanti sono e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità.

6. Scrivere una definizione comprensibile di funzione crescente in un intervallo (a, b). Dimostrare poi che la funzione $f(x) = x^2$ è crescente nell'intervallo $(0, 1)$ e non lo è nell'intervallo $(-1, 1)$.